

## Über Sätze von M. Zamansky und S. B. Stečkin und ihre Umkehrungen auf dem $n$ -dimensionalen Torus

H. JOHNEN

*Lehrstuhl A für Mathematik, Technological University of Aachen, Germany*

### 1. EINLEITUNG

Es sei  $X$  einer der Räume  $C(2\pi)$  oder  $L_p(2\pi)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , der  $2\pi$ -periodischen Funktionen einer reellen Variablen, die stetig oder zur  $p$ -ten Potenz integrierbar sind. Ist  $T_s$  eine Folge von trigonometrischen Polynomen vom Grade  $s$ ,  $s \in \mathfrak{N}$ , und  $f \in X$ , so zeigte Zamansky [17, p. 26], daß aus

$$\|f - T_s\| = O(s^{-\alpha}) \tag{1.1}$$

folgt

$$\|T_s^{(\rho)}\| = O(s^{\rho-\alpha}), \quad \rho > \alpha. \tag{1.2}$$

Stečkin [13, p. 236] bewies, daß aus (1.1)

$$f^{(r)} \in X, \quad \|f^{(r)} - T_s^{(r)}\| = O(s^{r-\alpha}), \quad r < \alpha, \tag{1.3}$$

folgt.

Ersetzt man in (1.1) und (1.2)  $s^{-\alpha}$  durch  $\omega(s^{-1})$ , wobei  $\omega(h)$  ein im Sinne von [13, p. 219] verallgemeinerter Stetigkeitsmodul ist, dann folgt aus (1.1) und (1.2), also mit stärkeren Voraussetzungen, eine stärkere Version des Satzes von Bernstein

$$\omega(r, h, f) \leq M\omega(h).^1 \tag{1.4}$$

Wenn wir als Folge trigonometrischer Polynome die Polynome bester Approximation wählen, d.h. diejenigen Polynome  $T_s^*$   $s$ -ten Grades, für die  $\|f - T_s^*\| = E_s(f) \equiv \inf \{\|f - T_s\|; T_s\}$ , dann besagt der Satz von Jackson in einer verallgemeinerten Fassung, daß unter der Voraussetzung (1.4)

$$E_s(f) \leq M_r M\omega(s^{-1}) \tag{1.5}$$

gilt, wobei die Konstante  $M_r$  nicht von  $f$  abhängt. Damit ist für geeignete  $f \in X$  die Bedingung (1.1) erfüllt.

Es entsteht nun die Frage, ob es möglich ist, nicht nur von (1.1), wie es Bernstein im Falle der besten Approximation getan hat, sondern auch von

<sup>1</sup> Hierbei ist wie üblich

$$\omega(r, h, f) = \sup_{0 < |t| \leq h} \|\Delta_t^r f\|, \quad \Delta_t^r f(x) = \sum_{l=0}^r (-1)^{r-l} \binom{r}{l} f(x+lt)$$

(1.2) auf (1.4) zu schließen. Wieder im Falle der besten Approximation konnten Butzer und Pawelke [4] (im Raume  $L_2(2\pi)$ ) und Sunouchi [14, 15] (im Raume  $C(2\pi)$ ,  $L_p(2\pi)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ) dieses Problem lösen. Sie zeigten, daß (1.1) aus (1.2) folgt. Damit folgt aber nach dem oben Bemerkten auch  $\omega(r, h, f) \leq Mh^\alpha$ , und wir erhalten, daß die Aussagen (1.1), (1.2) und (1.4) für  $T_s^*$  äquivalent sind.

Die Autoren von [6] zeigen, daß diese drei Aussagen außerdem zu (1.3) für  $T_s^*$  äquivalent sind. Gleichzeitig werden dort diese Aussagen ausführlich diskutiert und die Ergebnisse auf Banachräume und intermediäre Räume übertragen. Ihr Vorgehen läßt sich folgendermaßen beschreiben. Es sei  $X$  ein Banachraum und  $\{P_s\}_{s \in \mathfrak{N}}$  eine Folge von Unterräumen mit der Eigenschaft  $P_0 = \{0\}$ <sup>2</sup> und  $P_s \subset P_{s+1}$  für alle  $s \in \mathfrak{N}$ . Wir definieren zu  $f \in X$   $E_s(f) \equiv \inf \{\|f - T\|; T \in P_s\}$  und fordern von der Folge  $\{P_s\}_{s \in \mathfrak{N}}$  weiterhin, daß zu jedem  $s \in \mathfrak{N}$  und  $f \in X$  ein  $T_s^*(f)$  existiert, so daß

$$E_s(f) = \|f - T_s^*(f)\|$$

und  $\lim_{s \rightarrow \infty} E_s(f) = 0$ .

Gibt es zwei stetig in  $X$  eingebettete Banachunterräume  $X_i$ , ( $i = 1, 2$ ), so daß für jedes  $s \in \mathfrak{N}$   $P_s \subset X_i$ , und bestehen für diese Räume die Ungleichungen

$$E_s(f) \leq A_i s^{-\sigma_i} \|f\|_{X_i}, \quad f \in X_i, \quad (i = 1, 2) \quad (1.6)$$

$$\|T\|_{X_i} \leq B_i s^{\sigma_i} \|T\|, \quad T \in P_s, \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

wobei  $A_i, B_i, \sigma_i$  positive Konstanten sind, dann gilt

**SATZ 1.1.** *Ist  $\sigma_1 < \alpha < \sigma_2$ , so sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a)  $E_s(f) = O(s^{-\alpha})$ ;
- (b)  $f \in X_1$  und  $\|f - T_s^*(f)\|_{X_1} = O(s^{\sigma_1 - \alpha})$ ;
- (c)  $\|T_s^*(f)\|_{X_2} = O(s^{\sigma_2 - \alpha})$ ;
- (d)  $K(t, f; X, X_2) = O(t^{\alpha/\sigma_2})$ ,  $t \rightarrow 0$ .<sup>3</sup>

Der Beweis dieses Satzes folgt im wesentlichen aus den Ungleichungen (1.6) und (1.7), die Verallgemeinerungen der Jackson-Ungleichung (1.5) bzw. der Bernstein-Ungleichung für Ableitungen von Polynomen sind.

Ziel dieser Arbeit ist es einmal, "ein-dimensionale" Aussagen von Zamansky und Stečkin für Polynome bester Approximation auf dem  $n$ -dimensionalen Torus zu beweisen und sie in Zusammenhang mit den schon bekannten  $n$ -dimensionalen Versionen der Sätze von Jackson und Bernstein zu bringen. Die dabei verwandte Methode kann man als ein-parametrig bezeichnen. Zum anderen sollen Aussagen für den Fall, daß der Index  $s$  der Unterräume  $P_s$

<sup>2</sup> Die Voraussetzung  $P_0 = \{0\}$  ist beweistechnisch bedingt und kann entfallen.

<sup>3</sup> Definition und Eigenschaften von  $K(t, f; X, X_2)$  findet man z.B. in [3].

einem Produktraum angehört, gewonnen werden. Das Vorgehen ist hier mehrdimensional, und dies wird sich auch in der Wahl der Ungleichungen vom Typ (1.6) und (1.7) ausdrücken. Wir erhalten so eine Verallgemeinerung der von Butzer und Scherer in [6], [7] erzielten Ergebnisse.

2. STETIGKEITSMODULE UND UNGLEICHUNGEN VON BERNSTEIN UND JACKSON

Im folgenden Abschnitt sei  $X$  immer einer der Räume  $C(2\pi)$  oder  $L_p(2\pi)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , der auf dem  $n$ -dimensionalen Torus stetigen oder zur  $p$ -ten Potenz integrierbaren Funktionen mit der üblichen Norm. Ist  $f \in X$ , dann definieren wir für  $t \in \mathfrak{R}^1$  und  $e \in \mathfrak{R}^n$

$$[\Delta_t^r(e)f](x) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x + ite). \tag{2.1}$$

Für  $h \geq 0$  sei

$$\omega_e(r, h, f) = \sup_{0 < |t| \leq h} \|\Delta_t^r(e)f\|. \tag{2.2}$$

Ist  $\sigma^i$  der Einheitsvektor in Richtung der Koordinatenasche  $x_i$ , so schreibt man

$$\omega_i(r, h, f) = \omega_{\sigma_i}(r, h, f). \tag{2.3}$$

Ferner sei

$$\omega(r, h, f) = \sup_{\|e\|=1} \omega_e(r, h, f), \tag{2.4}$$

wobei für  $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathfrak{R}^n$   $\|e\| = \max_{1 \leq i \leq n} |e_i|$ .

Wir nennen  $\Delta_t^r(e)f$  die  $r$ -te Differenz und  $\omega_e(r, h, f)$  den  $r$ -ten Stetigkeitsmodul von  $f$  in Richtung  $e$ ,  $\omega_i(r, h, f)$  den  $r$ -ten partiellen Stetigkeitsmodul von  $f$  in Richtung  $x_i$  und  $\omega(r, h, f)$  den  $r$ -ten sphärischen Stetigkeitsmodul. Für  $r = 0$  setzen wir  $\omega_e(r, h, f) = \|f\|$ .

Wie im eindimensionalen Fall gilt für jedes  $e \in \mathfrak{R}^n$

$$\omega_e(r, h, f) \leq 2^r \|f\|, \tag{2.5}$$

$$\omega_e(r, s \cdot h, f) = s^r \omega_e(r, h, f), \quad s \in \mathfrak{R},$$

$$\omega_e(r, \lambda \cdot h, f) \leq (1 + \lambda)^r \omega_e(r, h, f), \quad \lambda > 0. \tag{2.6}$$

Entsprechende Eigenschaften besitzt auch der sphärische Stetigkeitsmodul.

Wenn wir von Ableitungen eines  $f \in X$  sprechen, dann verstehen wir darunter im folgenden immer distributionentheoretische Ableitungen.<sup>4</sup> In diesem Sinne gilt

<sup>4</sup> Interessante Zusammenhänge zwischen punktweisen Ableitungen, distributionentheoretischer Ableitungen und Normableitungen sind z.B. in [8] zu finden.

LEMMA 2.1 Existiert die  $r$ -te Richtungsableitung  $\partial^r f / \partial e^r$  von  $f \in X$  in Richtung  $e$  mit  $(\partial^r f / \partial e^r) \in X$ , dann ist

$$\omega_e(r+q, h, f) \leq h^r \omega_e\left(q, h, \frac{\partial^r f}{\partial e^r}\right). \quad (2.7)$$

Der Beweis verläuft genau wie im eindimensionalen Fall. Wie üblich bezeichne

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ist

$$k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathfrak{N}^n, \quad \mathfrak{N}^n = \prod_{i=1}^n \mathfrak{N},$$

dann sei

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad (2.8)$$

wobei  $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$ . Falls für  $f \in X$  und alle  $k \in \mathfrak{N}^n$  mit  $|k| = r$   $D^k f \in X$ , dann existiert die  $r$ -te Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e = (e_1, \dots, e_n)$  und es gilt

$$\frac{\partial^r f}{\partial e^r} = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} e_1^{k_1} \dots e_n^{k_n} D^k f. \quad (2.9)$$

Hierbei ist wie üblich  $k! = \prod_{i=1}^n k_i!$ . Mit Hilfe dieser Überlegungen folgt sofort

LEMMA 2.2. Existieren alle  $D^k f$ ,  $|k| = r$ , und ist mit  $f \in X$  auch jedes  $D^k f \in X$ , dann gilt

$$\omega(r, h, f) \leq h^r \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} \|D^k f\|. \quad (2.10)$$

Wir wollen uns nun der Bernstein-Ungleichung für trigonometrische Polynome  $m$ -ten Grades und dem Satz von Jackson über beste Approximation durch trigonometrische Polynome zuwenden. Wir geben

DEFINITION 2.1. Es sei  $g_1(t) = \cos t$ ,  $g_2(t) = \sin t$  und  $m' = (m_1', \dots, m_n') \in \mathfrak{N}^n$ . Eine Funktion  $h(x) = h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n g_{i_i}(m_i' x_i)$ ,  $i_i = 1, 2$ , heißt ein trigonometrisches Monom vom Grade  $m'$ . Ist  $m \in \mathfrak{N}$ , so heißt jede Funktion, die durch Linearkombination von Monomen vom Grade  $m' \leq m^5$  entsteht, ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $m$ . Wir bezeichnen ein solches Polynom mit  $T_m$ .

Da ein trigonometrisches Polynom  $m$ -ten Grades,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , in jeder

<sup>5</sup> Sind  $x, y \in \mathfrak{N}^n$ , so sei  $x < y$  genau dann, wenn  $x_i < y_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Veränderlichen  $x_i$  ein Polynom  $m_i$ -ten Grades ist, folgt aus der ein-dimensionalen Bernstein-Ungleichung

LEMMA 2.3. (*Bernstein-Ungleichung*): Für jedes trigonometrische Polynom  $T_m$  vom Grade  $m$  gilt

$$\|D^k T_m\| \leq \left( \prod_{i=1}^n m_i^{k_i} \right) \|T_m\|, \tag{2.11}$$

$$\sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} \|D^k T_m\| \leq |m|^r \|T_m\|. \tag{2.12}$$

Ist  $P_m = \{T_{m'}; m' \leq m\}$ , so definiert man zu jedem  $f \in X$

$$E_m(f) = \inf \{ \|f - T_{m'}\|; T_{m'} \in P_m \}. \tag{2.13}$$

Gleichfalls mit ein-dimensionalen Methoden beweist man die Aussage des Satzes von Jackson, die wir im folgenden Lemma die Jackson-Ungleichung nennen wollen. Es lautet

LEMMA 2.4. (*Jackson-Ungleichung*). Ist  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathfrak{N}^n$ , dann gibt es eine Konstante  $M(k_1, \dots, k_n)$ , so daß für alle  $f \in X$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathfrak{N}^n$

$$E_m(f) \leq M(k_1, \dots, k_n) \sum_{i=1}^n \omega_i(k_i, (m_i + 1)^{-1}, f). \tag{2.14}$$

Ein Beweis dieser Ungleichung ist z.B. in [16, p. 273] zu finden.

### 3. EIN-PARAMETRIGE APPROXIMATION AUF DEM $n$ -DIMENSIONALEN TORUS

Um die in [6] entwickelte Theorie anwenden zu können, teilen wir die Menge der trigonometrischen Polynome in eine Schar von linearen Räumen ein, die nur noch von einem Parameter abhängen. Wir benötigen hierzu folgende Definitionen.

DEFINITION 3.1. Eine Funktion  $\phi: \mathfrak{N}^n \rightarrow \mathfrak{R}^1$  heißt eine Gradfunktion, falls es eine Konstante  $L > 0$  gibt, so daß

$$L^{-1} \|m\| \leq \phi(m) \leq L \|m\| \tag{3.1}$$

für alle  $m \in \mathfrak{N}^n$ . Hierbei sei  $\|m\| = \max_{1 \leq i \leq n} |m_i|$ . Die Zahl  $\phi(m)$  nennen wir den  $\phi$ -Grad von  $m$ .

DEFINITION 3.2. Ein trigonometrisches Monom vom Grade  $m$  heißt vom  $\phi$ -Grade  $s$ , falls  $\phi(m) = s$ . Ist  $s \in \phi(\mathfrak{N}^n)$ , so heißt jede Funktion, die aus einer Linearkombination von trigonometrischen Monomen besteht, deren

$\phi$ -Grad  $\leq s$  ist, ein trigonometrisches Polynom vom  $\phi$ -Grade  $s$ . Ein solches Polynom bezeichnen wir mit  $T_s$ .

Bezeichnen wir mit  $P_s$  die Menge der trigonometrischen Polynome vom  $\phi$ -Grade  $s$ , dann ist  $P_s \subset P_{s'}$ , wenn  $s \leq s'$ . Es sei nun

$$E_s(f) = \inf \{ \|f - T_s\|; T_s \in P_s \}. \quad (3.2)$$

Da  $P_s$  ein endlich-dimensionaler Raum ist, gibt es zu jedem  $f \in X$  ein  $T_s^*(f)$  mit

$$E_s(f) = \|f - T_s^*(f)\|,$$

und aus (3.1) und (2.14) folgt für jedes  $f \in X$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_s(f) = 0.$$

LEMMA 3.1. *Ist  $f \in X$ , dann gibt es eine Konstante  $A_r$ , die nur von  $r$  abhängt, so daß*

$$E_s(f) \leq A_r \omega(r, (s+1)^{-1}, f). \quad (3.3)$$

*Beweis.* Ist  $s \in \phi(\mathfrak{N}^n)$ , so wähle man  $m = ([L^{-1}s], \dots, [L^{-1}s])$ .<sup>6</sup> Mit den Bezeichnungen von (2.12) haben wir

$$\begin{aligned} E_m(f) &\leq M(r) \sum_{i=1}^n \omega_i(r, (\|m\| + 1)^{-1}, f) \\ &\leq M(r)n \cdot \omega(r, (\|m\| + 1)^{-1}, f). \end{aligned}$$

Nach (2.6) und der Definition von  $m$  folgt

$$\begin{aligned} E_m(f) &\leq M(r) \cdot n \cdot \omega(r, Ls^{-1}, f) \\ &\leq M(r)(1 + L(1 + s^{-1}))^r \omega(r, (s+1)^{-1}, f). \end{aligned}$$

Nach (2.1) gilt aber für alle  $m' \leq m$   $\phi(m') \leq L\|m'\| \leq L\|m\| \leq s$ , da  $\|m\| \leq L^{-1}s$ . Deshalb ist  $P_{m'} \subset P_s$  und damit  $E_s(f) \leq E_{m'}(f)$ .

Bezeichnen wir mit  $X^{(r)}$  den Raum aller  $f \in X$ , für die  $D^k f \in X$  für alle  $k \in \mathfrak{N}^n$  mit  $|k| = r$ , so wird  $X^{(r)}$  unter der Norm

$$\|f\|_{(r)} = \|f\| + \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} \|D^k f\| \quad (3.4)$$

zu einem Banachraum.

LEMMA 3.2. *Ist  $f \in X^{(r)}$ , dann gibt es eine Konstante  $A_r$ , so daß*

$$E_s(f) \leq A_r s^{-r} \|f\|_{(r)}, \quad (3.5)$$

*und eine Konstante  $B_r$ , so daß für alle  $T_s \in P_s$ ,  $s \neq 0$ ,*

$$\|T_s\|_{(r)} \leq B_r s^r \|T_s\|. \quad (3.6)$$

<sup>6</sup> Ist  $a > 0$ , so sei  $[a] = \max \{l \in \mathfrak{N}; l \leq a\}$ .

*Beweis.* (3.5) folgt unmittelbar aus (3.3) mit (3.4) und (2.10). Es bleibt also nur (3.6) zu beweisen.

Unter der Menge aller  $m' \in \mathfrak{R}^n$  mit  $\phi(m') \leq s$  gibt es ein  $m$ , für das  $|m|$  maximal ist. Deshalb folgt für ein beliebiges  $T_s \in P_s$  nach (2.12) und (3.1)

$$\sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} \|D^k T_s\| \leq |m|^r \|T_s\| \leq n^r |m|^r \|T_s\| \leq (L \cdot n)^r s^r \|T_s\|.$$

Daraus folgt mit (3.4) die Behauptung.

Wir stellen nun an  $\phi$  die zusätzliche Forderung:

$$\text{ist } a \in \mathfrak{R}^1, m \in \mathfrak{R}^n \text{ mit } a \cdot m \in \mathfrak{R}^n, \text{ so sei } \phi(a \cdot m) = a\phi(m). \quad (3.7)$$

Damit folgt nun

**SATZ 3.3.** *Genügt  $\phi$  den Bedingungen (3.1) und (3.7) und ist  $s \in \phi(\mathfrak{R}^n)$ , dann sind für  $\alpha > 0$  folgende Aussagen äquivalent:*

- (a)  $E_s(f) = O(s^{-\alpha})$ ;
- (b)  $f \in X^{(r)}, r < \alpha, \|f - T_s^*(f)\|_{(r)} = O(s^{r-\alpha})$ ;
- (c)  $\|T_s^*(f)\|_{(\rho)} = O(s^{\rho-\alpha}), \rho > \alpha$ ;
- (d)  $K(t, f; X, X^{(\rho)}) = O(t^{\alpha/\rho}), \rho > \alpha$ ;
- (e)  $\omega(\rho, t, f) = O(t^\alpha), \rho > \alpha$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz der Aussagen (a)–(d) ergibt sich aus Satz 1.1. Nach (3.3) folgt (a) aus (e). Zerlegt man  $f \in X$  in  $f = f_1 + f_2$ , mit  $f_1 \in X, f_2 \in X^{(\rho)}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \omega(\rho, t, f) &\leq \omega(\rho, t, f_1) + \omega(\rho, t, f_2) \\ &\leq 2^\rho \|f_1\| + t^\rho \sum_{|k|=\rho} \frac{\rho!}{k!} \|D^k f_2\| \\ &\leq 2^\rho (\|f_1\| + t^\rho \|f_2\|_{(\rho)}). \end{aligned}$$

Deshalb ist nach der Definition von  $K(t^\rho, f; X, X^{(\rho)})$   $\omega(\rho, t, f) \leq 2^\rho K(t^\rho, f; X, X^{(\rho)})$ , und (e) folgt aus (d).

*Bemerkung.* Satz 3.3. läßt sich mit einigen Modifikationen des Beweises auch ohne die Bedingung (3.7) zeigen.

Die Bedingungen (3.1) und (3.7) werden von den Funktionen  $\phi_p(m) = (\sum_{i=1}^n m_i^p)^{1/p}, 0 < p \leq \infty$  erfüllt, insbesondere natürlich von der Funktion  $\phi_\infty(m) = \|m\|$ . Eine große Klasse von Funktionen des verlangten Typs erhält man auf folgende Weise (siehe auch [12]):

Es sei  $\mathfrak{R}$  eine kompakte Menge des  $\mathfrak{R}^n$ , die den Nullpunkt als inneren Punkt enthält und für die mit  $0 \leq a \leq 1$  und  $x \in \mathfrak{R}$  folgt  $ax \in \mathfrak{R}$ . Wir definieren

$$\phi_{\mathfrak{R}}(m) = \inf \{d > 0; m \in d \mathfrak{R}\}.$$

Speziell im Falle

$$\mathfrak{R}_p = \left\{ x; \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}, \quad 0 < p \leq \infty,$$

erhalten wir  $\phi_{\mathfrak{R}_p}(m) = \phi_p(m)$ .

#### 4. MEHRPARAMETRIGE APPROXIMATION

Wir möchten nun Satz 1.1. in einer anderen Richtung verallgemeinern.

Es sei  $X$  ein Banachraum mit stetig eingebetteten Banachunterräumen  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ . Wir betrachten den linearen Raum

$$X_0 = \bigcap_{i=1}^n X^{(i)},$$

der unter der Norm

$$\|f\|_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \|f\|_{X^{(i)}}$$

ebenfalls ein stetig in  $X$  eingebetteter Banachunterraum ist. Für jedes  $f \in X$  definieren wir das Funktional

$$K(t_1, \dots, t_n; f; X, X_0) = \inf \left\{ \|f_1\| + \sum_{i=1}^n t_i \|f_2\|_{X^{(i)}}; f_1 \in X, f_2 \in X_0, f = f_1 + f_2 \right\}. \quad (4.1)$$

Wir fordern, daß zu jedem  $m \in \mathfrak{N}^n$  ein linearer Unterraum  $P_m \subset X_0$  existiert mit den Eigenschaften:

- (i)  $P_m \subset P_{m'}$ , falls  $m \leq m'$ ;
- (ii)  $P_m = \{0\}$ , falls ein  $m_i = 0$ ;<sup>7</sup>
- (iii) Zu jedem  $f \in X$  existiert ein  $T_m^*(f) \in P_m$  mit
 
$$\|f - T_m^*(f)\| = E_m(f) \equiv \inf \{ \|f - T_m\|; T_m \in P_m \};$$
- (iv)  $\lim_{m \rightarrow \infty} E_m(f) = 0$  für jedes  $f \in X$ .<sup>8</sup>

Ferner sollen positive Konstanten  $A, \sigma_1, \dots, \sigma_n$  existieren, so daß für alle  $f \in X_0$

$$E_m(f) \leq A \sum_{i=1}^n m_i^{-\sigma_i} \|f\|_{X^{(i)}}, \quad (4.2)$$

und eine positive Konstante  $B$  mit

$$\sum_{i=1}^n m_i^{-\sigma_i} \|T_m\|_{X^{(i)}} \leq B \|T_m\|. \quad (4.3)$$

Wir bezeichnen (4.2) wieder als Jackson- (4.3) als Bernstein-Ungleichung.

<sup>7</sup> Diese Forderung ist technischer Natur.

<sup>8</sup>  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a_0$  genau dann, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N(\epsilon)$  gibt, so daß für alle  $m \in \mathfrak{N}^n$  mit  $m_i \geq N(\epsilon), i = 1, \dots, n, |a_m - a_0| < \epsilon$ .



Haben wir ein zweites  $n$ -Tupel von stetig in  $X$  eingebetteten Banachunter-  
räumen  $Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)}$ , mit  $P_m \subset Y_0 = \bigcap_{i=1}^n Y^{(i)}$  für alle  $m \in \mathfrak{R}^n$ , und gilt hierfür

$$E_m(f) \leq C \sum_{i=1}^n m_i^{-\rho_i} \|f\|_{Y^{(i)}}, \quad f \in Y_0, \quad (4.2')$$

$$\sum_{i=1}^n m_i^{-\rho_i} \|T_m\|_{Y^{(i)}} \leq D \|T_m\|, \quad (4.3')$$

dann gilt der

SATZ 4.1. Ist  $\sigma_i < \alpha_i < \rho_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Es existiert eine Konstante  $M_1$ , so daß für alle  $m \in \mathfrak{R}^n$  mit  $m_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$E_m(f) \leq M_1 \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j};$$

- (b)  $f \in X_0$ , und es existiert eine Konstante  $M_2$ , so daß für alle  $m \in \mathfrak{R}^n$  mit  $m_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\sum_{i=1}^n m_i^{-\sigma_i} \|f - T_m^*(f)\|_{X^{(i)}} \leq M_2 \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j};$$

- (c) es existiert eine Konstante  $M_3$ , so daß für alle  $m \in \mathfrak{R}^n$  mit  $m_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\sum_{i=1}^n m_i^{-\rho_i} \|T_m^*(f)\|_{Y^{(i)}} \leq M_3 \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j};$$

- (d)  $K(t_1, \dots, t_n; f; X, Y_0) \leq M_4 \sum_{j=1}^n t_j^{\alpha_j/\rho_j}$ .

*Beweis.* Wir zeigen erst, daß (b) aus (a) folgt. Dazu definieren wir  $a^l = (a_1^l, \dots, a_n^l)$ ,  $a_i > 1$ , und  $m \circ a^l = (m_1 a_1^l, \dots, m_n a_n^l)$ . Wählen wir die  $a_j$  so, daß  $(a_i^{\sigma_i} / a_j^{\alpha_j}) < 1$ , dann folgt aus (4.3) unter Anwendung von (a)

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \|T_{m \circ a^{l+1}}^*(f) - T_{m \circ a^l}^*(f)\|_{X^{(i)}} \\ & \leq B \sum_{l=0}^{\infty} (m_i a_i^{l+1})^{\sigma_i} \|T_{m \circ a^{l+1}}^*(f) - T_{m \circ a^l}^*(f)\| \\ & \leq 2B a_i^{\sigma_i} m_i^{\sigma_i} \sum_{l=0}^{\infty} a_i^{\sigma_i l} E_{m \circ a^l}(f) \\ & \leq 2B a_i^{\sigma_i} m_i^{\sigma_i} \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j} \left( \sum_{l=0}^{\infty} (a_i^{\sigma_i} / a_j^{\alpha_j})^l \right). \end{aligned}$$

Wir können also eine Konstante  $M_2$  finden, so daß

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|T_{m \circ a^{i+1}}^*(f) - T_{m \circ a^i}^*(f)\|_{X^{(i)}} < M_2 n^{-1} m_i^{\sigma_i} \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j} < \infty.$$

Da  $X^{(i)}$  ein Banachraum ist, konvergiert

$$\sum_{i=0}^{\infty} (T_{m \circ a^{i+1}}^*(f) - T_{m \circ a^i}^*(f))$$

und da  $X^{(i)}$  stetig in  $X$  eingebettet ist, haben wir

$$\sum_{i=0}^{\infty} (T_{m \circ a^{i+1}}^*(f) - T_{m \circ a^i}^*(f)) = f - T_m^*(f) \text{ in } X^{(i)}.$$

Deshalb ist  $f \in X^{(i)}$  und wegen der Dreiecksungleichung für die Norm

$$m_i^{-\sigma_i} \|f - T_m^*(f)\|_{X^{(i)}} \leq n^{-1} M_2 \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j}.$$

Da das gewählte  $i$  beliebig war, folgt Aussage (b).

Um (c) aus (b) zu beweisen, definieren wir für beliebiges  $a = (a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_j > 1, j = 1, \dots, n, m \circ a^{-l} = ([m_1 a_1^{-l}], \dots, [m_n a_n^{-l}])$ . Dann haben wir

$$\begin{aligned} T_m^*(f) &= \sum_{i=0}^{\infty} (T_{m \circ a^{-i}}^*(f) - T_{m \circ a^{-(i+1)}}^*(f)) \\ &= \sum_{i=0}^{l_0} (T_{m \circ a^{-i}}^*(f) - T_{m \circ a^{-(i+1)}}^*(f)), \end{aligned}$$

wobei  $l_0$  die größte ganze Zahl ist, so daß  $P_{m \circ a^{-l_0}} \neq \{0\}$ . Mit (4.3') erhalten wir

$$\begin{aligned} \|T_m^*(f)\|_{X^{(i)}} &\leq D \sum_{i=0}^{l_0} [m_i a_i^{-l}]^{\rho_i} \|T_{m \circ a^{-i}}^*(f) - T_{m \circ a^{-(i+1)}}^*(f)\| \\ &\leq 2D \sum_{i=0}^{l_0-1} [m_i a_i^{-l}]^{\rho_i} E_{m \circ a^{-(i+1)}}(f) + 2D \|f\|. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß  $E_{m \circ a^{-i}}(f) = E_{m \circ a^{-i}}(f - T_{m \circ a^{-i}}^*(f))$ , so erhält man mit (4.2)

$$\begin{aligned} \|T_m^*(f)\|_{X^{(i)}} &\leq 2DA \sum_{i=0}^{l_0-1} [m_i a_i^{-l}]^{\rho_i} \sum_{j=1}^n [m_j a_j^{-(i+1)}]^{-\sigma_j} \|f - T_{m \circ a^{-(i+1)}}^*(f)\|_{X^{(i)}} \\ &\quad + 2D \|f\|. \end{aligned}$$

Nach (b) folgt dann

$$\begin{aligned} \|T_m^*(f)\|_{X^{(i)}} &\leq 2DAM_2 \sum_{i=0}^{l_0-1} [m_i a_i^{-l}]^{\rho_i} \sum_{j=1}^n [m_j a_j^{-(i+1)}]^{-\alpha_j} + 2D \|f\| \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot M_3' m_i^{\rho_i} \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} (a_i^{\rho_i} / a_j^{\alpha_j})^{-i}. \end{aligned}$$

Wählen wir die  $a_j$  so, daß  $(a_i^{\rho_i}/a_j^{\alpha_j}) > 1$ , dann gibt es eine Konstante  $M_3$  mit

$$\|T_m^*(f)\|_{Y^{(i)}} \leq m_i^{\rho_i} n^{-1} M_3 \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j}.$$

Da  $i$  beliebig war, folgt die Aussage (c).

Nun schließen wir von (c) auf (a) zurück. Wir setzen  $a^l = (2^l, \dots, 2^l)$  und beachten, daß

$$E_{m \circ a^l}(f) \leq E_{m \circ a^{l+1}}(f) + E_{m \circ a^l}(T_{m \circ a^{l+1}}^*(f)).$$

Dann läuft der Beweis wie im eindimensionalen Fall.

Zum Beweis der Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) beachten wir, daß für eine beliebige Zerlegung  $f = f_1 + f_2$  mit  $f_1 \in X, f_2 \in Y_0$  nach (4.2')

$$E_m(f) \leq E_m(f_1) + E_m(f_2) \leq \|f_1\| + C \sum_{i=1}^n m_i^{-\rho_i} \|f_2\|_{Y^{(i)}}.$$

Deshalb folgt

$$E_m(f) \leq C' K(m_1^{-\rho_1}, \dots, m_n^{-\rho_n}; f; X, Y_0),$$

und (d) impliziert (a). Wählen wir aber andererseits die Zerlegung  $f = (f - T_m^*(f)) + T_m^*(f)$ , so gilt wegen (a) und (c)

$$\begin{aligned} K(m_1^{-\rho_1}, \dots, m_n^{-\rho_n}; f; X, Y_0) &\leq \|f - T_m^*(f)\| + \sum_{i=1}^n m_i^{-\rho_i} \|T_m^*(f)\|_{Y^{(i)}} \\ &\leq C'' \sum_{i=1}^n m_i^{-\alpha_i}. \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von  $K(t_1, \dots, t_n; f; X, Y_0)$  folgt daher (d) aus (a).

*Bemerkung.*<sup>9</sup> Es sei  $G(t_1, \dots, t_n)$  eine auf  $X$  operierende Halbgruppe mit  $G(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n G_i(t_i)$  und  $G_i(t_i)$  eine Halbgruppe der Klasse  $\mathcal{E}_0$  mit dem infinitesimalen Erzeuger  $A_i, i = 1, \dots, n$ . Erfüllen diese Halbgruppen die Bedingung  $G_i(t_i) G_j(t_j) = G_j(t_j) G_i(t_i)$  für alle  $i, j$  und setzt man  $X^{(i)} = X^{(r_i)}$  wobei  $X^{(r_i)}$  der Raum  $D(A_i^{r_i})$  unter der Norm  $\|f\|_{(r_i)} = \max(\|f\|, \|A_i^{r_i} f\|)$  ist, dann läßt sich das durch  $X^{(r_1, \dots, r_n)} = \bigcap_{i=1}^n X^{(r_i)}$  definierte Funktional  $K(t_1, \dots, t_n; f)$  durch

$$K(t_1, \dots, t_n; f; X, X^{(r_1, \dots, r_n)}) \leq M \sum_{j=1}^n K_i(t_i; f; X, X^{(r_1, \dots, r_n)})$$

abschätzen.<sup>10</sup> Hierbei ist

$$K_i(t_i, f) = K(0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0; f).$$

<sup>9</sup> Definitionen siehe [3].

<sup>10</sup> Siehe [11].

Andererseits gilt aber allgemein

$$\sum_{i=1}^n K_i(t_i, f) \leq nK(t_1, \dots, t_n; f).$$

Zur Anwendung von Satz 4.1 auf den  $n$ -dimensionalen Torus betrachten wir den Raum  $X$ , der nun wieder wie in Abschnitt 2 definiert sei.  $X^{(i)} = X^{(r_i)}$  sei der Teilraum der  $f \in X$ , für die  $\partial^{r_i} f / \partial x_i^{r_i} = D_i^{r_i} f \in X$ . Wir normieren  $X^{(r_i)}$  durch

$$\|f\|_{(r_i)} = \max(\|f\|, \|D_i^{r_i} f\|) \quad (4.4)$$

und machen es so zu einem stetig in  $X$  eingebetteten Banachraum. Es sei

$$X^{(r_1, \dots, r_n)} = \bigcap_{i=1}^n X^{(r_i)}$$

und  $P_m$  der Raum aller trigonometrischen Polynome vom Grade  $m$ . Die wichtigen Bedingungen (i), (iii) und (iv) sind für  $P_m$  erfüllt und wir haben nach (2.14), (2.7) und (4.4) für jedes  $f \in X^{(r_1, \dots, r_n)}$

$$E_m(f) \leq A(r_1, \dots, r_n) \sum_{i=1}^n m_i^{-r_i} \|f\|_{(r_i)}. \quad (4.5)$$

Nach (2.11) haben wir für alle  $m \in \mathfrak{R}^n$ , für die  $m_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n m_i^{-r_i} \|T_m\|_{(r_i)} \leq 2n \|T_m\|,$$

d.h. die notwendigen Voraussetzungen zu Satz 4.1 sind erfüllt, und es gilt

**SATZ 4.2.** *Ist  $r_i < \alpha_i < \rho_i$ , dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a)  $E_m(f) \leq M_1 \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j}$  für alle  $m \in \mathfrak{R}$  mit  $m_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;
- (b)  $f \in X^{(r_1, \dots, r_n)}$  und  $\sum_{j=1}^n m_j^{-r_j} \|D_j^{r_j}(f - T_m^*(f))\| \leq M_2 \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j}$  für alle  $m \in \mathfrak{R}$  mit  $m_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;
- (c)  $\sum_{j=1}^n m_j^{-\rho_j} \|D_j^{\rho_j} T_m^*(f)\| \leq M_3 \sum_{j=1}^n m_j^{-\alpha_j}$  für alle  $m \in \mathfrak{R}$  mit  $m_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;
- (d)  $K(t_1, \dots, t_n; f; X, X^{(\rho_1, \dots, \rho_n)}) \leq M_4 \sum_{j=1}^n t_j^{\alpha_j / \rho_j}$ ;
- (e)  $\sum_{j=1}^n \omega_j(\rho_j, t_j, f) \leq M_5 \sum_{j=1}^n t_j^{\alpha_j}$ .

Wir brauchen nur noch die Äquivalenz der ersten vier Aussagen mit (e) nachzuweisen. Zunächst folgt (a) aus (e) nach (2.14). Für eine beliebige Zerlegung  $f = f_1 + f_2$  mit  $f_1 \in X, f_2 \in X^{(\rho_1, \dots, \rho_n)}$  gilt nach (2.2) und (2.1)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \omega_j(\rho_j, t_j, f) &\leq \sum_{j=1}^n \omega_j(\rho_j, t_j, f_1) + \sum_{j=1}^n \omega_j(\rho_j, t_j, f_2) \\ &\leq \sum_{j=1}^n 2^{\rho_j} \|f_1\| + \sum_{j=1}^n t_j^{\rho_j} \|f_2\|_{(\rho_j)}. \end{aligned}$$

Letztere Ungleichung gilt nach (2.5) und (2.7). Daraus folgt aber

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(\rho_j, t_j, f) \leq \left( \sum_{j=1}^n 2^{\rho_j} \right) \cdot K(t_1^{\rho_1}, \dots, t_n^{\rho_n}; f; X, X^{(\rho_1, \dots, \rho_n)}).$$

Mit Satz 4.2. und Satz 3.3. haben wir eine Übertragung der Sätze von Zamansky und Stečkin mit ihren Umkehrungen auf den  $n$ -dimensionalen Torus gefunden. Und zwar entspricht die Richtung von (a) nach (b) dem Satz von Stečkin, die Richtung von (a) nach (c) ist eine mehr-dimensionale Version des Satzes von Zamansky. Die Richtung von (a) nach (e) entspricht der Aussage des Satzes von Bernstein. Beim Beweis, daß Aussage (a) aus (e) folgt, benutzten wir die Aussage des Satzes von Jackson fast in voller Schärfe wie sie durch (2.14) gegeben ist. Jedoch läßt sich (wie in [11] gezeigt) für  $K(t_1, \dots, t_n; f)$  eine Abschätzung der Form

$$K(t_1^{\rho_1}, \dots, t_n^{\rho_n}; f; X, X^{(\rho_1, \dots, \rho_n)}) \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(\rho_i, t_i, f)$$

beweisen, so daß man (a) über (d) aus (e) schließen kann, d.h. wir brauchen die Jackson-Ungleichung nur in der Gestalt (4.5).

Setzen wir in Satz 4.2.  $\alpha_i = \alpha, r_i = r, \rho_i = \rho$ , so kann man die Aussagen dieses Satzes mit denen des Satzes 3.3. vergleichen. Wie man leicht sieht, sind die Aussagen (a) beider Sätze gleich, wenn man in Satz 3.3  $\phi(m) = \|m\|$  wählt. Dann sind aber auch die Aussagen (e) äquivalent. Ferner ist noch zu bemerken, daß durch Aussage (e) in Satz 3.3 die Definition der Räume  $H_p^{(\alpha)}$  von Nikolskii [10], durch die Aussage (e) in Satz 4.2 diejenige der bekannten Räume  $B_{p, \infty}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$  von Besov [2] gegeben ist. Interpolation zwischen  $X$  und dem Sobolev Raum  $X^{(\rho)}$  im Sinne der Interpolationsmethode (Peetre, Lions-Peetre) entspricht der Einführung der sogenannten "fraktionierten Sobolev-Räume". Interpoliert man mit Hilfe der Funktionale  $K_i(t, f)$  zwischen  $X$  und  $X^{(r_1, \dots, r_n)}$ , so erhält man die Besov-Räume  $B_{p, \theta}^{(\alpha, \dots, \alpha_n)}$ . In beiden Fällen kann man für diese intermediären Räume analoge Sätze vom obigen Typ erhalten.

Diese Arbeit wurde im Rahmen eines vom Landesamt für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen geförderten Forschungsvorhabens angefertigt. Der Verfasser dankt

dem Landesamt für die Erlaubnis, sie in dieser Zeitschrift zu veröffentlichen. Ferner weiß er sich Herrn Prof. P. L. Butzer für viele helfende Ratschläge und Herrn Dipl.-Math. K. Scherer für die kritische Durchsicht des Manuskriptes verpflichtet.<sup>11</sup>

## LITERATUR

1. H. BERENS, Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen. Habilitationsschrift. *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1968.
2. O. V. BESOV, Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension. *Am. Math. Soc. Transl.* (2) **40** (1964), 85–126.
3. P. L. BUTZER UND H. BERENS, "Semi-Groups of Operators and Approximation." Springer, Berlin, 1967.
4. P. L. BUTZER UND S. PAWELKE, Ableitungen von trigonometrischen Approximationsprozessen. *Acta Sci. Math. Szeged* **28** (1967), 173–183.
5. P. L. BUTZER UND K. SCHERER, "Approximationsprozesse und Interpolationsmethoden." Hochschulskt, Mannheim-Zürich, 1968.
6. P. L. BUTZER UND K. SCHERER, Über die Fundamental-Sätze der Approximationstheorie in abstrakten Räumen. In: "Abstract Spaces and Approximation" (Proceedings of the Oberwolfach Conference 1968, P. L. Butzer and B. Sz.-Nagy, Eds.), *ISNM*, Vol. 10. (Basel 1969.)
7. P. L. BUTZER UND K. SCHERER, On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin. *Aequationes Math.* **2** (1968), 36–51.
8. E. GORLICH UND R. J. NESSEL, Über Peano- und Riemann-Ableitungen in der Norm. *Arch. Math.* **18** (1963), 123–144.
9. G. G. LORENTZ, "Approximation of Functions." Holt, New York, 1966.
10. S. M. NIKOLSKIĭ, On imbedding, continuation and approximation theorems for differentiable functions of several variables. *Russian Math. Surveys* **16** (1961), 55–104.
11. J. PEETRE, Etude de quelques espaces d'interpolation. Unveröffentlichtes Manuskript, Lund, 1964.
12. H. S. SHAPIRO, Approximation by trigonometric polynomials to periodic functions of several variables (Proceedings of the Oberwolfach Conference, 1968).
13. S. B. STEČKIN, On the order of the best approximation of continuous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **15** (1951), 219–242.
14. G. SUNOUCHI, Derivatives of a polynomial of best approximation. *Jahresber. DMV* **70** (1968), 165–166.
15. G. SUNOUCHI, Derivatives of a trigonometric polynomial of best approximation. (Proceedings of the Oberwolfach Conference, 1968).
16. A. F. TIMAN, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable." Oxford Univ. Press, London and New York, 1963.
17. M. ZAMANSKY, Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **66** (1949), 19–93.

---

<sup>11</sup> Die obigen Überlegungen lassen sich auch auf geeignete Mannigfaltigkeiten übertragen. Diese Ergebnisse und eine Reihe von weiteren Aussagen werden in "Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen," Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1969 erscheinen.